Занятие 9. Основы теории фильтрации случайных процессов. Постановка задачи.

Основные отличия от задачи оценивания параметров:

1. Информативные параметры меняются со временем

$$\boxed{\lambda(t) \neq const}$$

2. Требуется дать оценку процесса не для какого-то одного, а для каждого интересующего момента времени.

$y(t_k) = S\left(t_k, \lambda_k(t_k)\right) + n(t_k)$: наблюдения на интервале $[0, t_k]$

$S\left(t_k, \lambda(t_k)\right) -$ сигнал, несущий информационный процесс $\lambda(t_k)$

$n(t_k)$ - БГШ с односторонней СПМ $N_0 = 2\sigma_n^2 T$

\+ известна априорная информация о $\lambda(t_k)$

Постановка задачи фильтрации, интерполяции, экстраполяции

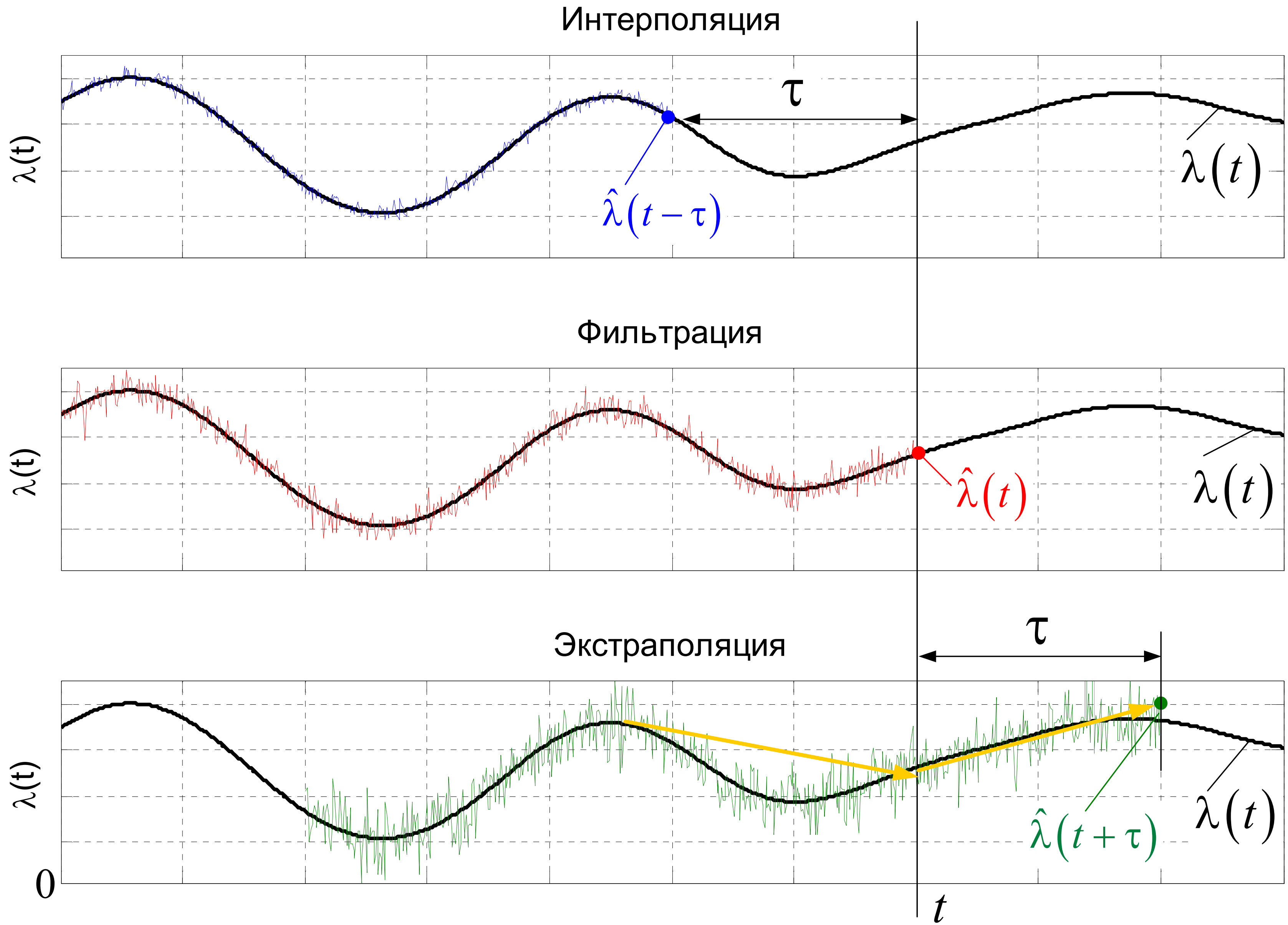
Задача фильтрации: используя наблюдения *y(t)* и апр. инф. требуется сформировать оценку $\hat{\lambda}(t)$ для текущего момента времени *t*.

Задача интерполяции: требуется сформировать оценку $\hat{\lambda}(t-\tau)$ для момента времени в прошлом.

Задача экстраполяции: требуется предсказать оценку $\hat{\lambda}(t+\tau)$ для момента времени в будущем.

Критерий – минимальная дисперсия ошибки.

Фильтрация, экстраполяция, интерполяция



Априорная информация о процессе $\lambda_k(t_k)$

В теории оптимальной фильтрации сообщение $\lambda_k(t_k)$ представляют как часть многомерного марковского процесса:

$$\lambda_k\left(t_k\right)=\mathbf{cx}\left(t_k\right), \quad \mathbf{x}\left(t_0\right)=\mathbf{x}_0, \quad k-\text{момент времени}$$

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k-1},t_{k-1}\right)+\mathbf{g}\left(\mathbf{x}_{k-1},t_{k-1}\right)\xi_{k-1}$$

$\xi_k - m$-мерный вектор БГШ с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_\xi$

В каждый момент времени $\mathbf{x}_k$ является векторной с.в. и описывается априорной ПВ $p\left(\mathbf{x}_k,t_k\right)$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Из теории статистических решений оценка **x** формируется на основе АПВ **x**:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{x} p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right) d\mathbf{x} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{x}}_k = \arg\max p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right)$$

Поэтому надо искать апостериорную плотность вероятности (АПВ) **x** на текущий момент времени *k*: $p\left(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{Y}_0^k\right)$

Рассмотрим совместную условную ПВ $p\left(\mathbf{x}_k, y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$

$$p\left(\mathbf{x}_k, y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$$

$\mathbf{Y}_0^{k-1} = y_0, y_1 \ldots y_k$ - выборка

$p\left(y_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k\right) = 1/c$ - не зависит от $\mathbf{x}$;

$p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) -$ одношаговая функция правдоподобия;

отсюда:

$$\boxed{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = cp\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)}$$

При белом гауссовском шуме наблюдений

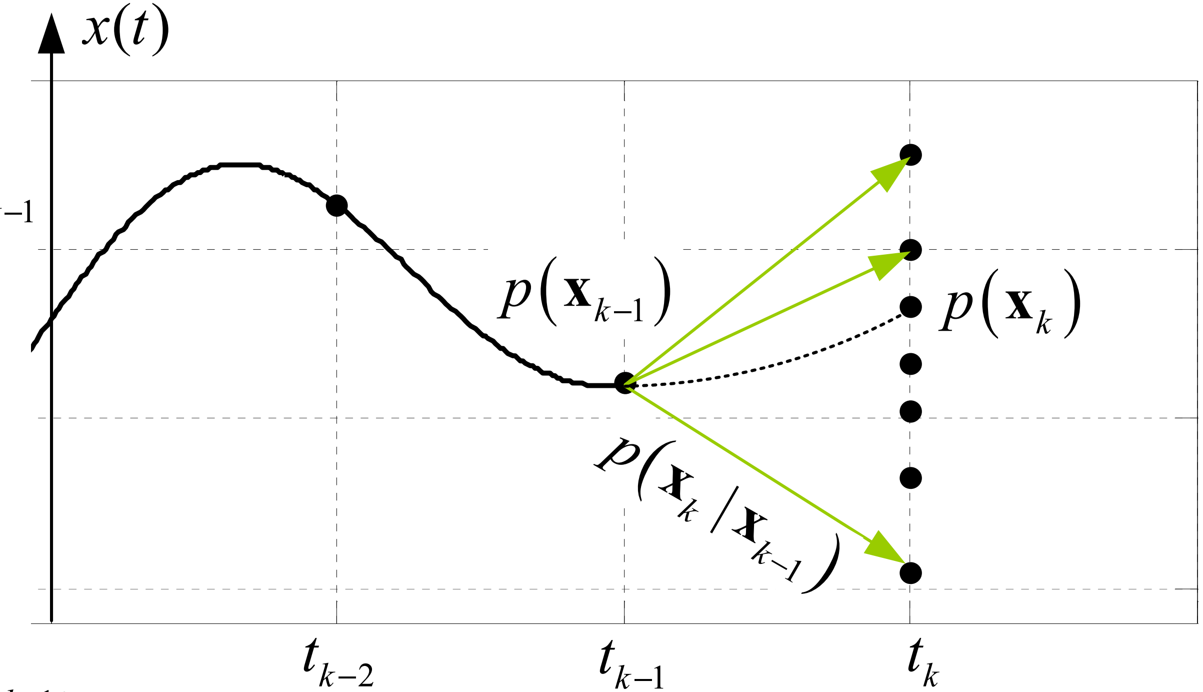
$$p\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{\left(y_k - S\left(\mathbf{x}_k, t_k\right)\right)^2}{2\sigma_n^2} \right)$$

Плотность вероятности перехода марковского процесса

$p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1})$ - плотность вероятности перехода

Важное свойство МП:

$$p(\mathbf{x}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}_{k-1})\, p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})\, d\mathbf{x}_{k-1}$$



Пример нахождения ПВ перехода для скалярного x:

$$x_k = f(x_{k-1}, t_{k-1}) + g(x_{k-1}, t_{k-1})\xi_{k-1},$$

ξ_{k-1} - дискретный БГШ с дисперсией σ_ξ^2

$$p(x_k | x_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x_k - f(x_{k-1}, t_{k-1})\right)^2}{2\sigma^2} \right), \quad \sigma^2 = \sigma_\xi^2 g^2(x_{k-1}, t_{k-1})$$

Рекуррентное уравнение для АПВ дискретных процессов

Находим через ПВ перехода (условность не играет роли):

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}$$

Отсюда

$$\boxed{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k}\right) = cp\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad p\left(\mathbf{x}_0 \middle| \mathbf{Y}_0^{0}\right) = p_{ap}\left(\mathbf{x}_0\right)}$$

- уравнение Стратоновича для дискретных МП

Нормировочная константа

Одношаговая функция правдоподобия

АПВ на предыдущем шаге

ПВ перехода

Уравнение Стратоновича для АПВ непрерывных МП

Описание непрерывного МП:

$$\lambda(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\xi}(t)$$

$\boldsymbol{\xi}(t) - m$-мерный вектор БГШ с корреляционной

матрицей $\mathbf{R}_\xi(\tau) = (\mathbf{S}_\xi/2)\delta(\tau)$

$$\boxed{\frac{dp\left(\mathbf{x}, t \middle| \mathbf{Y}_0^t\right)}{dt} = L\left(p\left(\mathbf{x}, t \middle| \mathbf{Y}_0^t\right)\right) + \left[F(\mathbf{x}, t) - \int_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, t) p\left(\mathbf{x}, t \middle| \mathbf{Y}_0^t\right) d\mathbf{x}\right] p\left(\mathbf{x}, t \middle| \mathbf{Y}_0^t\right)}$$

$$F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t) 2\mathbf{N}_n^{-1}\left(\mathbf{y}(t) - 0{,}5\mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t)\right); \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t) + \mathbf{n}(t);$$

$\mathbf{N}_n$ - корреляционная матрица шумов наблюдений: $M\left[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^{\mathrm{T}}(t+\tau)\right] = (\mathbf{N}_n/2)\delta(\tau)$

$L(*)$ - дифференциальный оператор Фоккера-Планка-Колмогорова (стр. 47)

АПВ дискретных процессов с учетом неинформ. параметров

Наблюдаемый сигнал:

$$y_k = S_k\left(\mathbf{c}\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) + n_k, \quad M\left[n_k n_m\right] = \sigma_n^2 \delta_{km}, \quad \boldsymbol{\mu} = const \subset p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right)$$

Основная идея: $$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu} \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) d\boldsymbol{\mu}$$

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = c_1 p_{ap}\left(\mathbf{x}_k\right) \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{Y}_0^k \middle| \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\mu}, \quad p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) = c_2 p_{ap}\left(\mathbf{x}_k\right) \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{Y}_0^{k-1} \middle| \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\mu}$$

сумасшедшая тавтология: $$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = \left(\frac{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right)}{p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right)$$

$$p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{Y}_0^k\right) = c\tilde{p}\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\mathbf{x}_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_0^{k-1}\right) p\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{x}_{k-1}\right) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad \text{где}$$

$$\tilde{p}\left(y_k \middle| \mathbf{x}_k\right) = \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{Y}_0^k \middle| \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\mu} \Big/ \int_{\boldsymbol{\mu}} p\left(\mathbf{Y}_0^{k-1} \middle| \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}\right) p_{ap}\left(\boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\mu}, \quad p\left(\mathbf{x}_0 \middle| \mathbf{Y}_0^0\right) = p_{ap}\left(\mathbf{x}_0\right)$$