Лекция 6

Оценка параметров сигнала

Постановка задачи: на отрезке времени $[0, T]$ принимается реализация

$$y(t) = S(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) + n(t), \qquad t \in [0, T], \qquad (7.1)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = |\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k|^{\mathrm{T}} = const$$

- вектор информативных параметров с АПВ $p(\boldsymbol{\lambda})$

$$\boldsymbol{\mu} = |\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p|^{\mathrm{T}} = const$$

- вектор неинформативных параметров с АПВ $p(\boldsymbol{\mu})$

$n(t)$ - БГШ с односторонней СПМ N_0

По наблюдениям (7.1) необходимо сформировать оценку $\hat{\lambda}$, оптимальную по выбранному критерию

Общее байесовское решение

При квадратичной функции потерь

$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \int \boldsymbol{\lambda} p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T\right) d\boldsymbol{\lambda}$ - если неинформативных параметров нет

$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \int\int \boldsymbol{\lambda} p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T, \boldsymbol{\mu}\right) d\boldsymbol{\lambda}\, p\left(\boldsymbol{\mu} \middle| Y_0^T\right) d\boldsymbol{\mu}$ - если неинформативные параметры есть

При простой функции потерь

$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max_{\boldsymbol{\lambda}} p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T\right)$ - если неинформативных параметров нет

$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max_{\boldsymbol{\lambda}} \int p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T, \boldsymbol{\mu}\right) p\left(\boldsymbol{\mu} \middle| Y_0^T\right) d\boldsymbol{\mu}$ - если неинформативные параметры есть

$Y_0^T = \left\{ y(t),\ t \in [0, T] \right\}$ – наблюдаемая реализация

Оценки максимального правдоподобия

Если априорная ПВ λ неизвестна, тогда применяют метод максимального правдоподобия

$$\boxed{\left.\frac{\partial \ln \rho\left(Y_0^T|\boldsymbol{\lambda}\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}} = 0}$$

$$\rho\left(Y_0^T|\boldsymbol{\lambda}\right) = \frac{p\left(Y_0^T|\boldsymbol{\lambda}\right)}{p\left(Y_0^T\middle|S\left(t,\boldsymbol{\lambda}\right)=0\right)}$$

<<<< отношение правдоподобия (которое легко записать)

При наличии неинформативных параметров сигнала:

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})p(\boldsymbol{\mu})d\boldsymbol{\mu}$$

Свойства оценок максимального правдоподобия

- **Несмещенность**

$$M\left[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}\right]=\int \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}\, p\left(Y_0^T|\boldsymbol{\lambda}\right)dY_0^T=\boldsymbol{\lambda}$$

- **Эффективность:** дисперсия ошибки минимальна и равна границе Рао-Крамера:

$$D_{\tilde{\lambda}_{\text{эф}}}=\left[\int\left(\frac{\partial \ln\left(p\left(Y_0^T|\boldsymbol{\lambda}\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\lambda}}\right)^2 p\left(Y_0^T|\boldsymbol{\lambda}\right)dY_0^T\right]^{-1}$$

Достаточность

Оценка $\hat{\lambda}=g\left(Y_0^T\right)$ называется *достаточной*, если в результате обработки, т.е. при выполнении преобразования $g\left(Y_0^T\right)$, из наблюдений Y_0^T полностью извлечена информация об оцениваемом параметре, т.е. никакая другая обработка наблюдений (никакая другая функция $\tilde{g}\left(Y_0^T\right)$) не может дать дополнительной информации, касающейся оцениваемого параметра λ.

$$p\left(Y_0^T|\lambda\right)=f\left(\lambda,\hat{\lambda}=g\left(Y_0^T\right)\right)\cdot h\left(Y_0^T\right)$$

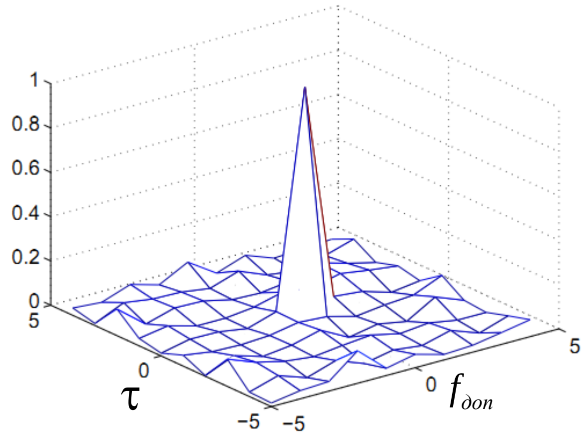
Оценка дискретных параметров сигнала

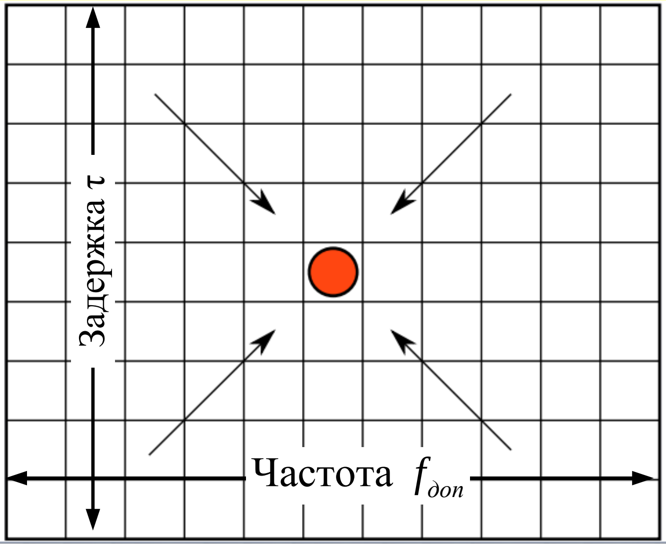
$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i\}, \quad i = \overline{1, p},$ - набор дискретных значений.

Заметим: каждому значению λ_i ставится в соответствие число i

Поэтому достаточно оценить i. $P_{ap}(\lambda_i)$ - заданы, $\sum_{i=1}^{p} P_{ap}(\lambda_i) = 1$

В приемниках СРНС при поиске и обнаружении сигналов одновременно решается задача оценивания задержки и доплеровской частоты. Для этого область неопределенности по частоте и задержке разбивается на множество дискретных значений.





Оценка <u>дискретных</u> параметров сигнала

Положим, что неинформативных параметров нет. В качестве критерия возьмём простую функцию потерь и запишем для неё байесовское решающее правило.

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max_{\boldsymbol{\lambda}} p\left(\boldsymbol{\lambda}\middle|Y_0^T\right); \quad P\left(\lambda_i\middle|Y_0^T\right) = \frac{P_{ap}\left(\lambda_i\right) p\left(Y_0^T\middle|\lambda_i\right)}{p\left(Y_0^T\right)} = \frac{P_{ap}\left(\lambda_i\right) p\left(Y_0^T\middle|\lambda_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{p} P_{ap}\left(\lambda_i\right) p\left(Y_0^T\middle|\lambda_i\right)}$$

можно прологарифмировать: $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max\limits_{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{ln}\left(P\left(\lambda_i\middle|Y_0^T\right)\right);$

$$\ln\left(P\left(\lambda_i\middle|Y_0^T\right)\right) = \ln\left(P_{ap}\left(\lambda_i\right)\right) + \ln\left(p\left(Y_0^T\middle|\lambda_i\right)\right) - \cancel{\ln\left(\sum_{i=1}^{p} P_{ap}\left(\lambda_i\right) p\left(Y_0^T\middle|\lambda_i\right)\right)}$$

$$p\left(Y_0^T\middle|\lambda_i\right) = k\exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_0^T S\left(t,\lambda_i\right)\left(y(t) - 0{,}5S\left(t,\lambda_i\right)\right)dt\right\}$$

- функция правдоподобия

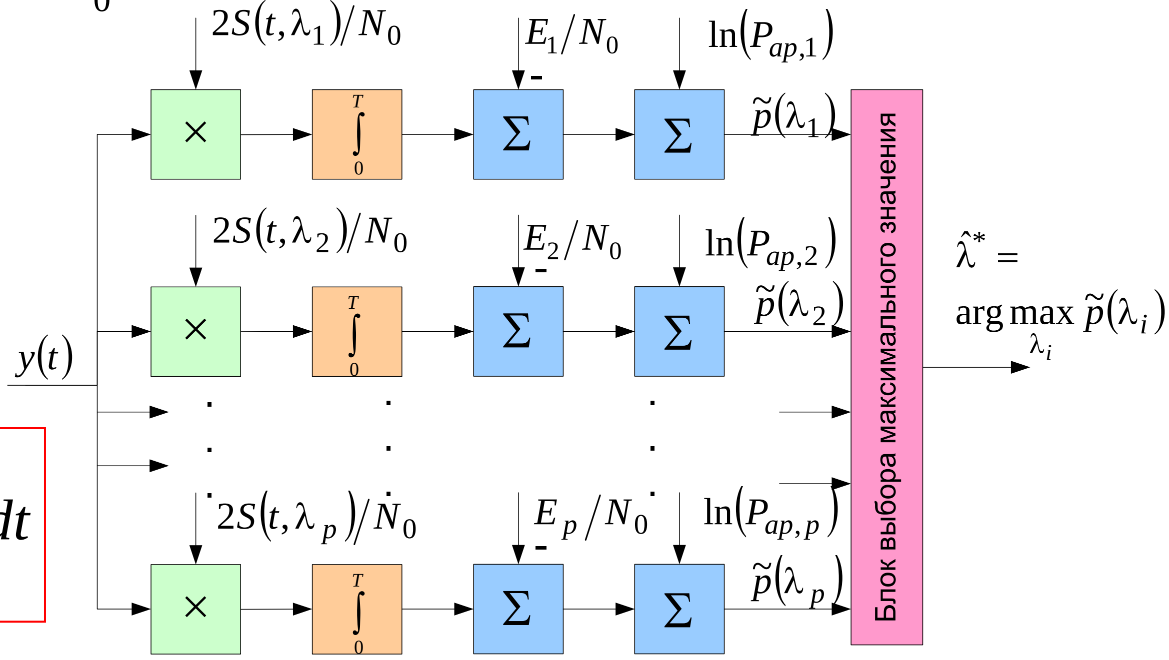
Оценка дискретных параметров сигнала

$$\tilde{p}(\lambda_i) = \ln\left(P_{ap}(\lambda_i)\right) + \frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\lambda_i)\,dt - \frac{E(\lambda_i)}{N_0}$$

$$\boxed{\hat{\lambda} = \arg\max_{\lambda_i} \tilde{p}(\lambda_i);}$$

$E(\lambda_i) = \int_0^T S^2(t,\lambda_i)\,dt$ - энергия сигнала (при $\lambda = \lambda_i$)

Опять в основе - корреляционный приёмник!



$$\boxed{u_{\text{оп}\,i}(T) = \frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\lambda_i)\,dt}$$

Оценка непрерывных параметров сигнала

Аналитическое решение данной задачи иногда можно получить при простой функции потерь

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \arg\max_{\boldsymbol{\lambda}} p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T\right); \quad \left.\frac{\partial p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}} = 0; \quad \left.\frac{\partial \ln p\left(\boldsymbol{\lambda} \middle| Y_0^T\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}} = 0$$

Оценки по методу максимального правдоподобия:

$$\left.\frac{\partial \ln \rho(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}} = 0; \quad \left.\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)S(t,\boldsymbol{\lambda})\,d\tau - \frac{E(\boldsymbol{\lambda})}{N_0}\right)\right|_{\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{м}}} = 0$$

Оценка амплитуды сигнала

В приемниках СРНС амплитуда радионавигационного сигнала является одним из критериев его качества, по которому формируются оценки точности навигационных параметров.

$$S(t,\lambda) = Af(t-\tau_з)\cos(\omega t+\varphi_0), \quad t\in[0,T]$$

$$f(t) = G_{дк}(t)\cdot G_{НС}(t) = \pm 1 \text{ - функция модуляции ДК и НС}$$

Уравнение правдоподобия: $\left.\dfrac{\partial \ln \rho(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}_{ì}} = 0$

$$\left.\frac{\partial}{\partial A}\left[\frac{2}{N_0}\int_0^T Af(t-\tau_з)\cos(\omega t+\varphi_0)\big(y(t)-0{,}5Af(t-\tau_з)\cos(\omega t+\varphi_0)\big)dt\right]\right|_{A=\hat{A}} = 0$$

$$\boxed{\hat{A} = \frac{1}{E_1}\int_0^T y(t)S_1(t)dt,} \quad S_1(t) = f(t-\tau_з)\cos(\omega t+\varphi_0), \quad E_1 = \int_0^T S_1^2(t)dt$$

Коррелятор

Оценка параметров сигнала с помощью дискриминаторов

Основная идея: будем решать уравнение правдоподобия численно – методом Ньютона

Итеративный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений вида $h(\lambda)=0$:

$$\lambda^{(i+1)}=\lambda^{(i)}-h\left(\lambda^{(i)}\right)\left[\frac{\partial h\left(\lambda^{(i)}\right)}{\partial\lambda}\right]^{-1}$$

В нашем случае:

$$h(\lambda)=\boxed{\frac{\partial\ln\left(\rho(\lambda)\right)}{\partial\lambda}}=0$$

Оценка параметров сигнала с помощью дискриминаторов

После подстановки $h(\lambda)=\dfrac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial\lambda}$

получим:

$$\boxed{\lambda^{(i+1)}=\lambda^{(i)}-\frac{\partial \ln\left[\rho\left(\lambda^{(i)}\right)\right]}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\lambda^{(i)}\right)\right)}{\partial\lambda^2}\right]^{-1}}$$

При малых отклонениях $\left(\lambda^{(i+1)}-\lambda^{(i)}\right)$ метод сходится за одну итерацию. Тогда

$\lambda^{(i+1)}\equiv\hat{\lambda}_{\text{м}}$ – оценка максимального правдоподобия;

$\lambda^{(i)}\equiv\lambda_{\text{оп}}$ – опорное значение параметра;

Алгоритм оценивания с помощью дискриминатора

$$\boxed{\hat{\lambda}_{\text{м}} = \lambda_{\text{оп}} + u_{\text{д,н}}\left(\lambda_{\text{оп}}\right)}$$

$$u_{\text{д,н}}\left(\lambda_{\text{оп}}\right) = -\frac{\partial \ln\left(\rho\left(\lambda_{\text{оп}}\right)\right)}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\lambda_{\text{оп}}\right)\right)}{\partial\lambda^2}\right]^{-1}$$

- выходной сигнал дискриминатора с нормированной крутизной ДХ.

Сам дискриминатор:

$$u_{\text{д}} = \frac{\partial \ln\left(\rho\left(\lambda_{\text{оп}}\right)\right)}{\partial\lambda}$$

Крутизна ДХ:

$$S_{\text{д}}\left(\lambda_{\text{оп}}\right) = -M\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\lambda_{\text{оп}}\right)\right)}{\partial\lambda^2}\right]$$

Потенциальная точность оценок параметров сигнала

…Под потенциальной точностью оценок параметров радиосигнала понимают нижнюю границу Рао-Крамера для дисперсии ошибки оценки максимального правдоподобия. Потенциальная точность характеризует тот предел точности оценивания, который может быть достигнут только в результате обработки наблюдаемой реализации ***Y*** , т.е. без учета априорной информации.

Будем рассматривать сигнал в общем виде

$$S(t,\lambda) = Af(t-\tau_з)\cos(\omega t+\varphi_0), \quad t\in[0,T]$$

$f(t)$- огибающая, $\tau_з$ - время запаздывания

Логарифм отношения правдоподобия:

$$\ln(\rho(\boldsymbol{\lambda})) = \frac{2}{N_0}\int_0^T \left\{ y(t)Af(t-\tau_з)\cos(\omega t+\varphi_0) - 0{,}5A^2 f^2(t-\tau_з)\cos^2(\omega t+\varphi_0)\right\}dt$$

Неравенство Рао-Крамера

Смысл неравенства Рао-Крамера состоит в том, что средний квадрат ошибки любой оценки не превосходит некоторой нижней границы, которая определяется выражением, стоящим в правой части (7.2), и носит название нижней границы Рао-Крамера для оценки случайного параметра.

$$D_{\hat{\lambda}} \geq \left(M\left\{ \left(\frac{\partial \ln p\left(\lambda, Y_0^T\right)}{\partial\lambda} \right)^2 \right\} \right)^{-1} = \frac{-1}{M\left\{ \left(\partial^2 \ln \rho(\lambda) \right) / \partial\lambda^2 \right\}} = D_{\hat{\lambda}_{ýô}} \qquad (7.2)$$

В случае векторного $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\mathbf{R}_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \geq \mathbf{J}^{-1}$$

$$J_{ij} = M\left[\frac{\partial \ln\left(\rho(\boldsymbol{\lambda})\right)}{\partial\lambda_i} \cdot \frac{\partial \ln\left(\rho(\boldsymbol{\lambda})\right)}{\partial\lambda_j} \right] = -M\left[\frac{\partial^2 \ln\left(\rho(\boldsymbol{\lambda})\right)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} \right]$$

Потенциальная точность оценки задержки по огибающей

Поиск нижней границы Рао-Крамера дает ф-лу Вудворта:

$$\boxed{D_{\text{ош}\,\tau_з} = \frac{-1}{M\left\{\partial^2 \ln\left(\rho\left(\tau_з\right)\right)/\partial\tau_з^2\right\}} = \frac{N_0}{2E\beta^2} = \frac{1}{2q\beta^2}} \qquad q = \frac{E}{N_0} - \text{ с/ш}$$

Можно показать, что $\beta^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \left|S\left(j\omega\right)\right|^2 d\omega \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|S\left(j\omega\right)\right|^2 d\omega$

$S\left(j\omega\right) -$ комплексный спектр огибающей сигнала

То есть β – это эффективная ширина спектра сигнала

Вывод: потенциальная точность оценки задержки сигнала определяется отношением с/ш и эффективной шириной спектра сигнала

Потенциальная точность оценки частоты сигнала

Нижняя граница Рао-Крамера:

$$D_{\text{ош}\, f} = \frac{-1}{M\left\{\partial^2 \ln\left(\rho(f)\right) / \partial f^2\right\}}$$

Полагаем, что $\dfrac{\partial}{\partial f}\displaystyle\int_0^T f^2(t-\tau_з)\cos^2(2\pi f t+\varphi_0)\,dt = 0,$ тогда

$$M\left[\frac{\partial^2}{\partial f^2}\ln\rho(f)\right] = \frac{2A}{N_0}M\left[\int_0^T y(t)\,f(t-\tau_з)\frac{\partial^2\cos(2\pi f t+\varphi_0)}{\partial f^2}dt\right] = -\frac{2}{N_0}\int_0^T (2\pi t)^2 S^2(t,\tau_з)\,dt$$

$$\alpha = \left(\int_0^T (2\pi t)^2 S^2(t)\,dt \Big/ \int_0^T S^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$ - **среднеквадратическая длительность сигнала**

$$\boxed{D_{\text{ош}\,\hat f} = \frac{N_0}{2E\alpha^2} = \frac{1}{2q\alpha^2}}$$

Вывод: потенциальная точность оценки частоты сигнала определяется отношением с/ш и среднеквадратической длительностью сигнала

Потенциальная точность совместной оценки частоты и задержки сигнала

Элементы корреляционной матрицы ошибок:

$$D_{\text{ош}\,\hat{\tau}_\text{з}} = \frac{J_{22}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\alpha^2}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - \left(\overline{ft}\right)^2\right)}$$

$$D_{\text{ош}\,\hat{f}} = \frac{J_{11}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\beta^2}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - \left(\overline{ft}\right)^2\right)}$$

$$D_{\text{ош}\,\hat{\tau}_\text{з}\hat{f}} = \frac{J_{12}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\overline{ft}}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - \left(\overline{ft}\right)^2\right)}$$

$\alpha\beta$ - база сигнала

*Вывод: точность совместных оценок тем выше, чем выше отношение с/ш или чем выше **база** сигнала (произведение эффективной длительности на эффективную ширину спектра)*

Письменное домашнее задание

1. Найти потенциальную точность совместной оценки амплитуды и фазы сигнала (остальные параметры считаются известными)

Результат – корреляционная матрица ошибок (2x2) оценивания амплитуды и фазы.

2. Найти потенциальную точность оценки амплитуды сигнала при неизвестной начальной фазе сигнала (остальные параметры считаются известными)

Результат – дисперсия ошибки оценивания амплитуды.

$$y(t)=\boxed{A}f(t-\tau_з)\cos(\omega t+\boxed{\varphi_0})+n(t), \quad t\in[0,T]$$

$f(t)$- огибающая, $\tau_з$ - время запаздывания, $n(t)$ - БГШ.