

Лекция 6

Оценка параметров сигнала

Постановка задачи: на отрезке времени $[0, T]$ принимается реализация

$$y(t) = S(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (7.1)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k|^T = \text{const}$$

- вектор информативных параметров с апр. ПВ $p(\boldsymbol{\lambda})$

$$\boldsymbol{\mu} = |\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p|^T = \text{const}$$

- вектор неинформативных параметров с апр. ПВ $p(\boldsymbol{\mu})$

$n(t)$ - БГШ с односторонней СПМ N_0

По наблюдениям (7.1) необходимо сформировать оценку $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$, оптимальную по выбранному критерию

Общее байесовское решение

При квадратичной функции потерь

$$\hat{\lambda} = \int \lambda p(\lambda | \mathbf{Y}_0^T) d\lambda - \text{если неинформативных параметров нет}$$

$$\hat{\lambda} = \int \int \lambda p(\lambda | \mathbf{Y}_0^T, \boldsymbol{\mu}) d\lambda p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{Y}_0^T) d\boldsymbol{\mu} - \text{если неинформативные параметры есть}$$

При простой функции потерь

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} p(\lambda | \mathbf{Y}_0^T) - \text{если неинформативных параметров нет}$$

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} \int p(\lambda | \mathbf{Y}_0^T, \boldsymbol{\mu}) p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{Y}_0^T) d\boldsymbol{\mu} - \text{если неинформативные параметры есть}$$

$$\mathbf{Y}_0^T = \{ \mathbf{y}(t), t \in [0, T] \} \quad - \quad \text{наблюдаемая реализация}$$

Оценки максимального правдоподобия

Если априорная ПВ λ неизвестна, тогда применяют метод максимального правдоподобия

$$\frac{\partial \ln \rho(\mathbf{Y}_0^T | \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}_M} = 0$$

$$\rho(\mathbf{Y}_0^T | \lambda) = \frac{p(\mathbf{Y}_0^T | \lambda)}{p(\mathbf{Y}_0^T | S(t, \lambda) = 0)} \lllll \begin{array}{l} \text{отношение правдоподобия} \\ \text{(которое легко записать)} \end{array}$$

При наличии неинформативных параметров сигнала:

$$\tilde{\rho}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda, \mu) p(\mu) d\mu$$

Свойства оценок

максимального правдоподобия

- Несмещенность

$$M \left[\hat{\lambda}_M \right] = \int \hat{\lambda}_M p \left(\mathbf{Y}_0^T | \lambda \right) d\mathbf{Y}_0^T = \lambda$$

- Эффективность:

дисперсия ошибки минимальна и равна границе Рао-Крамера:

$$D_{\tilde{\lambda}_{\text{эф}}} = \left[\int \left(\frac{\partial \ln \left(p \left(\mathbf{Y}_0^T | \lambda \right) \right)}{\partial \lambda} \right)^T \left(\frac{\partial \ln \left(p \left(\mathbf{Y}_0^T | \lambda \right) \right)}{\partial \lambda} \right) p \left(\mathbf{Y}_0^T | \lambda \right) d\mathbf{Y}_0^T \right]^{-1}$$

Достаточность

Оценка $\hat{\lambda} = g \left(Y_0^T \right)$ называется *достаточной*, если в результате обработки, т.е. при выполнении преобразования $g \left(Y_0^T \right)$, из наблюдений Y_0^T полностью извлечена информация об оцениваемом параметре, т.е. никакая другая обработка наблюдений (никакая другая функция $\tilde{g} \left(Y_0^T \right)$) не может дать дополнительной информации, касающейся оцениваемого параметра λ .

$$p \left(\mathbf{Y}_0^T | \lambda \right) = f \left(\lambda, \hat{\lambda} = g \left(\mathbf{Y}_0^T \right) \right) \cdot h \left(\mathbf{Y}_0^T \right)$$

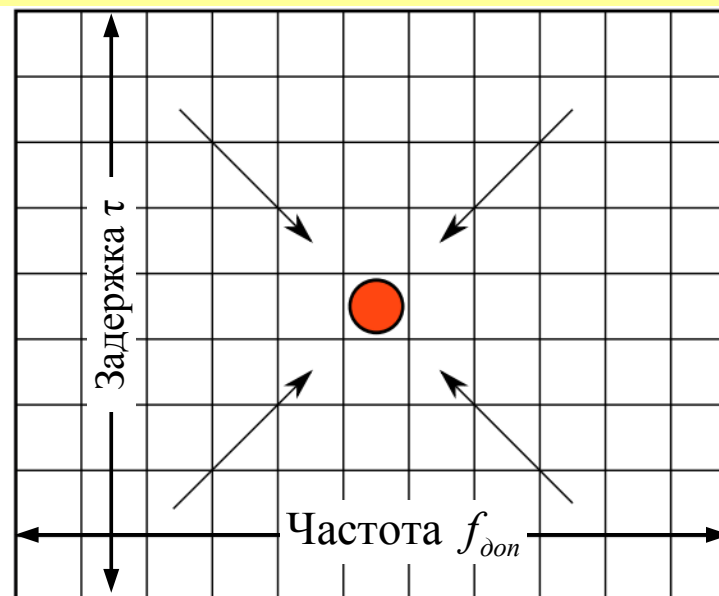
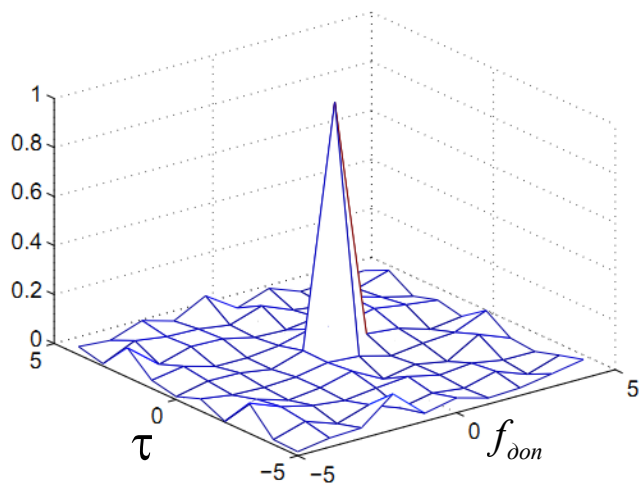
Оценка дискретных параметров сигнала

$\lambda = \{\lambda_i\}$, $i = \overline{1, p}$, - набор дискретных значений.

Заметим: каждому значению λ_i ставится в соответствие число i

Поэтому достаточно оценить i . $P_{ap}(\lambda_i)$ - заданы, $\sum_{i=1}^p P_{ap}(\lambda_i) = 1$

В приемниках СРНС при поиске и обнаружении сигналов одновременно решается задача оценивания задержки и доплеровской частоты. Для этого область неопределенности по частоте и задержке разбивается на множество дискретных значений.



Оценка дискретных параметров сигнала

Положим, что неинформативных параметров нет. В качестве критерия возьмём простую функцию потерь и запишем для неё байесовское решающее правило.

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} p(\lambda | \mathbf{Y}_0^T); \quad P(\lambda_i | \mathbf{Y}_0^T) = \frac{P_{ap}(\lambda_i) p(\mathbf{Y}_0^T | \lambda_i)}{p(\mathbf{Y}_0^T)} = \frac{P_{ap}(\lambda_i) p(\mathbf{Y}_0^T | \lambda_i)}{\sum_{i=1}^p P_{ap}(\lambda_i) p(\mathbf{Y}_0^T | \lambda_i)}$$

можно прологарифмировать: $\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} \left[\ln \left(P(\lambda_i | \mathbf{Y}_0^T) \right) \right];$

$$\ln \left(P(\lambda_i | \mathbf{Y}_0^T) \right) = \ln \left(P_{ap}(\lambda_i) \right) + \ln \left(p(\mathbf{Y}_0^T | \lambda_i) \right) - \ln \left(\sum_{i=1}^p P_{ap}(\lambda_i) p(\mathbf{Y}_0^T | \lambda_i) \right)$$

$$p(\mathbf{Y}_0^T | \lambda_i) = k \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda_i) (y(t) - 0,5S(t, \lambda_i)) dt \right\} \text{ - функция правдоподобия}$$

Оценка дискретных параметров сигнала

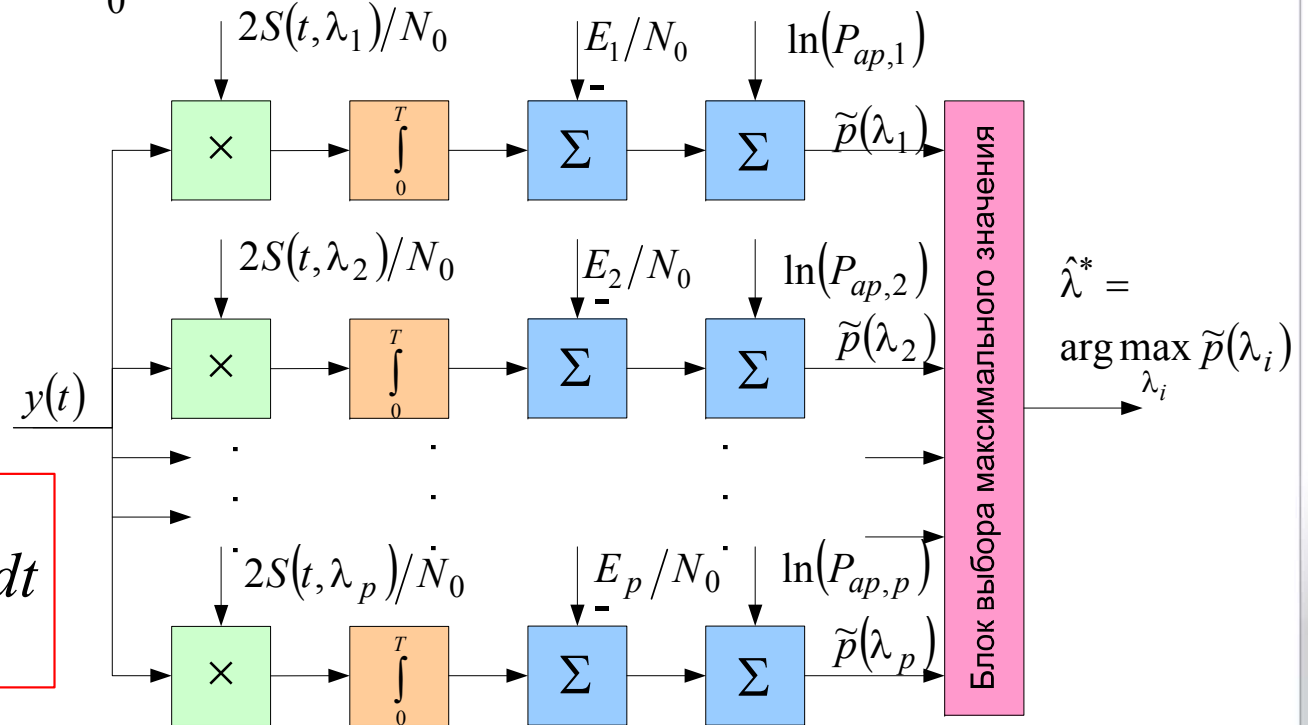
$$\tilde{p}(\lambda_i) = \ln(P_{ap}(\lambda_i)) + \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) S(t, \lambda_i) dt - \frac{E(\lambda_i)}{N_0}$$

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda_i} \tilde{p}(\lambda_i);$$

$$E(\lambda_i) = \int_0^T S^2(t, \lambda_i) dt - \text{энергия сигнала (при } \lambda = \lambda_i)$$

Опять в основе - корреляционный приёмник!

$$u_{\text{оп}i}(T) = \frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) S(t, \lambda_i) dt$$



Оценка непрерывных параметров сигнала

Аналитическое решение данной задачи иногда можно получить при простой функции потерь

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} p(\lambda | \mathbf{Y}_0^T); \quad \left. \frac{\partial p(\lambda | \mathbf{Y}_0^T)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0; \quad \left. \frac{\partial \ln p(\lambda | \mathbf{Y}_0^T)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0$$

Оценки по методу максимального правдоподобия:

$$\left. \frac{\partial \ln \rho(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}_M} = 0; \quad \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{2}{N_0} \int_0^T y(t) S(t, \lambda) d\tau - \frac{E(\lambda)}{N_0} \right) \right|_{\lambda = \hat{\lambda}_M} = 0$$

Оценка амплитуды сигнала

В приемниках СРНС амплитуда радионавигационного сигнала является одним из критериев его качества, по которому формируются оценки точности навигационных параметров.

$$S(t, \lambda) = Af(t - \tau_3) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad t \in [0, T]$$

$$f(t) = G_{\text{ДК}}(t) \cdot G_{\text{НС}}(t) = \pm 1 - \text{функция модуляции ДК и НС}$$

Уравнение правдоподобия: $\left. \frac{\partial \ln \rho(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \hat{\lambda}_i} = 0$

$$\left. \frac{\partial}{\partial A} \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T Af(t - \tau_3) \cos(\omega t + \varphi_0) (y(t) - 0,5 Af(t - \tau_3) \cos(\omega t + \varphi_0)) dt \right] \right|_{A = \hat{A}} = 0$$

$$\hat{A} = \frac{1}{E_1} \int_0^T y(t) S_1(t) dt, \quad S_1(t) = f(t - \tau_3) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad E_1 = \int_0^T S_1^2(t) dt$$

Коррелятор

Оценка параметров сигнала с помощью дискриминаторов

Основная идея: будем решать уравнение правдоподобия численно – методом Ньютона

Итеративный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений вида $\mathbf{h}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(i+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(i)} - \left[\frac{\partial \mathbf{h}(\boldsymbol{\lambda}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^{-1} \mathbf{h}(\boldsymbol{\lambda}^{(i)})$$

В нашем случае: $\mathbf{h}(\boldsymbol{\lambda}) = \left(\frac{\partial \ln(\rho(\boldsymbol{\lambda}))}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T = \mathbf{0}$

Оценка параметров сигнала с помощью дискриминаторов

После подстановки $\mathbf{h}(\boldsymbol{\lambda}) = \left(\frac{\partial \ln(\rho(\boldsymbol{\lambda}))}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T$ получим:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(i+1)} = \boldsymbol{\lambda}^{(i)} - \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \left(\frac{\partial \ln[\rho(\boldsymbol{\lambda}^{(i)})]}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T \right]^{-1} \left(\frac{\partial \ln[\rho(\boldsymbol{\lambda}^{(i)})]}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T$$

- итеративный алгоритм с критерием
СХОДИМОСТИ

$$\left\| \boldsymbol{\lambda}^{(i+1)} - \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \right\| \leq \varepsilon \quad \text{или для отдельных компонент } \boldsymbol{\lambda} :$$

$$\left| \lambda_j^{(i+1)} - \lambda_j^{(i)} \right| \leq \varepsilon_j$$

Дискриминатор и крутизна дискриминационной хар-ки

$$\mathbf{u}_{\text{д,н}}(\lambda_{\text{оп}}) = - \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \ln [\rho(\lambda_{\text{оп}})]}{\partial \lambda} \right)^T \right]^{-1} \left(\frac{\partial \ln [\rho(\lambda_{\text{оп}})]}{\partial \lambda} \right)^T$$

- выходной сигнал дискриминатора с нормированной крутизной ДХ.

Сам дискриминатор:

Крутизна ДХ:

$$\mathbf{u}_{\text{д}} = \left(\frac{\partial \ln [\rho(\lambda_{\text{оп}})]}{\partial \lambda} \right)^T \quad \mathbf{S}_{\text{д}}(\lambda_{\text{оп}}) = -M \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \ln [\rho(\lambda_{\text{оп}})]}{\partial \lambda} \right)^T \right]$$

Потенциальная точность оценок параметров сигнала

...Под потенциальной точностью оценок параметров радиосигнала понимают нижнюю границу Рао-Крамера для дисперсии ошибки оценки максимального правдоподобия. Потенциальная точность характеризует тот предел точности оценивания, который может быть достигнут только в результате обработки наблюдаемой реализации Y , т.е. без учета априорной информации.

Будем рассматривать сигнал в общем виде

$$S(t, \lambda) = Af(t - \tau_3) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad t \in [0, T]$$

$f(t)$ - огибающая, τ_3 - время запаздывания

Логарифм отношения правдоподобия:

$$\ln(\rho(\lambda)) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \left\{ y(t) Af(t - \tau_3) \cos(\omega t + \varphi_0) - 0,5 A^2 f^2(t - \tau_3) \cos^2(\omega t + \varphi_0) \right\} dt$$

Неравенство Рао-Крамера

Смысл неравенства Рао-Крамера состоит в том, что средний квадрат ошибки любой оценки не превосходит некоторой нижней границы, которая определяется выражением, стоящим в правой части (7.2), и носит название нижней границы Рао-Крамера для оценки случайного параметра.

$$D_{\hat{\lambda}} \geq \left(M \left\{ \left(\frac{\partial \ln p(\lambda, \mathbf{Y}_0^T)}{\partial \lambda} \right)^2 \right\} \right)^{-1} = \frac{-1}{M \{ (\partial^2 \ln \rho(\lambda)) / \partial \lambda^2 \}} = D_{\hat{\lambda}_{\text{эф}}} \quad (7.2)$$

В случае векторного $\boldsymbol{\lambda}$: $\mathbf{D}_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \geq \mathbf{J}^{-1}$

$$J_{ij} = M \left[\frac{\partial \ln(\rho(\boldsymbol{\lambda}))}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{\partial \ln(\rho(\boldsymbol{\lambda}))}{\partial \lambda_j} \right] = -M \left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\boldsymbol{\lambda}))}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right]$$

Потенциальная точность оценки задержки по огибающей

Поиск нижней границы Рао-Крамера дает ф-лу Вудворта:

$$D_{\text{ош } \tau_3} = \frac{-1}{M \left\{ \partial^2 \ln(\rho(\tau_3)) / \partial \tau_3^2 \right\}} = \frac{N_0}{2E\beta^2} = \frac{1}{2q\beta^2} \quad q = \frac{E}{N_0} \text{ — с/ш}$$

Можно показать, что $\beta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega$

$S(j\omega)$ – комплексный спектр огибающей сигнала

То есть β – это эффективная ширина спектра сигнала

Вывод: потенциальная точность оценки задержки сигнала определяется отношением с/ш и эффективной шириной спектра сигнала

Потенциальная точность оценки частоты сигнала

Нижняя граница

Рао-Крамера:

$$D_{\text{ош } f} = \frac{-1}{M \left\{ \partial^2 \ln(\rho(f)) / \partial f^2 \right\}}$$

Полагаем, что $\frac{\partial}{\partial f} \int_0^T f^2(t - \tau_3) \cos^2(2\pi ft + \varphi_0) dt = 0$, тогда

$$M \left[\frac{\partial^2}{\partial f^2} \ln \rho(f) \right] = \frac{2A}{N_0} M \left[\int_0^T y(t) f(t - \tau_3) \frac{\partial^2 \cos(2\pi ft + \varphi_0)}{\partial f^2} dt \right] = -\frac{2}{N_0} \int_0^T (2\pi t)^2 S^2(t, \tau_3) dt$$

$$\alpha = \left(\int_0^T (2\pi t)^2 S^2(t) dt / \int_0^T S^2(t) dt \right)^{1/2} \quad - \text{среднеквадратическая длительность сигнала}$$

$$D_{\text{ош } \hat{f}} = \frac{N_0}{2E\alpha^2} = \frac{1}{2q\alpha^2}$$

Вывод: потенциальная точность оценки частоты сигнала определяется отношением с/ш и среднеквадратической длительностью сигнала

Потенциальная точность совместной оценки частоты и задержки сигнала

Элементы корреляционной матрицы ошибок:

$$D_{\text{ош } \hat{\tau}_3} = \frac{J_{22}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\alpha^2}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - (\overline{ft})^2\right)} \quad D_{\text{ош } \hat{f}} = \frac{J_{11}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\beta^2}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - (\overline{ft})^2\right)}$$

$$D_{\text{ош } \hat{\tau}_3 \hat{f}} = \frac{J_{12}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} = \frac{\overline{ft}}{2q\left(\alpha^2\beta^2 - (\overline{ft})^2\right)} \quad \alpha\beta - \text{ база сигнала}$$

Вывод: точность совместных оценок тем выше, чем выше отношение с/ш или чем выше база сигнала (произведение эффективной длительности на эффективную ширину спектра)