

Лекция 10. Оптимальная нелинейная фильтрация

Задача фильтрации называется нелинейной, если сообщение описывается нелинейным дифференциальным (разностным) уравнением, и/или нелинейно входит в наблюдения $y(t)$

Постановка задачи (в дискретном времени)

Фильтруемый процесс:

$$\lambda_k = f_{k-1}(\lambda_{k-1}) + g_{k-1}(\lambda_{k-1})\xi_{k-1}, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0,$$

$$\xi_{k-1} - \text{ДБГШ: } M \begin{bmatrix} \xi_k & \xi_m^T \end{bmatrix} = D_\xi \delta_{km}$$

$f_k(x_k)$, $g_k(x_k)$ – известные функции

Наблюдения

$$y_k = S_k(\lambda_k) + n_k,$$

n_k – ДБГШ с дисперсией σ_n^2

$S_k(\lambda_k)$ – сигнальная функция (известная).

Решение выводится из уравнения Стратоновича:

$$p(\lambda_k | Y_0^k) = c p(y_k | \lambda_k) \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) p(\lambda_k | \lambda_{k-1}) d\lambda_{k-1}, \quad p(\lambda_0 | Y_0^0) = \mathbb{N}(m_\lambda, \sigma_\lambda)$$

Задача нелинейной фильтрации в общем виде не решается. АПВ не является гауссовской. Уравнение Стратоновича решают приближённо. Практически, наибольшее распространение получило гауссовское приближение, при котором АПВ полагается гауссовской.

Решение задачи нелинейной фильтрации

Идея: будем приближённо считать АПВ гауссовской:

$$p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda, k-1}}} \exp\left(-\frac{(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2D_{\lambda, k-1}}\right)$$

Одношаговая функция правдоподобия:

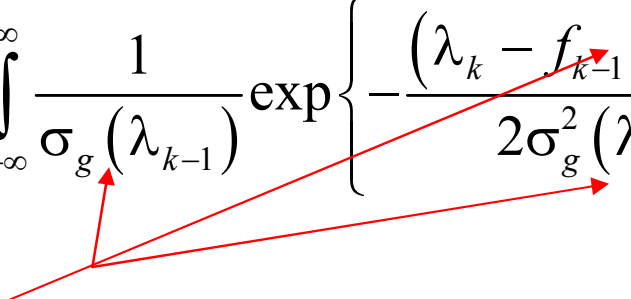
$$p(y_k | \lambda_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left\{-\frac{(y_k - S_k(\lambda_k))^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

Переходная плотность вероятности:

$$p(\lambda_k | \lambda_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2(\lambda_{k-1})}} \exp\left\{-\frac{(\lambda_k - f_{k-1}(\lambda_{k-1}))^2}{2\sigma_g^2(\lambda_{k-1})}\right\}, \quad \sigma_g^2(\lambda_{k-1}) = g_{k-1}^2(\lambda_{k-1})\sigma_\xi^2$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

Подставим выражения для всех ПВ в уравнение Стратоновича

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) p(\lambda_k | \lambda_{k-1}) d\lambda_{k-1} = p(\lambda_k | Y_0^{k-1}) =$$
$$= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_g(\lambda_{k-1})} \exp \left\{ -\frac{(\lambda_k - f_{k-1}(\lambda_{k-1}))^2}{2\sigma_g^2(\lambda_{k-1})} \right\} \exp \left(-\frac{(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2D_{\lambda, k-1}} \right) d\lambda_{k-1}$$


Вот из-за этого интеграл не берется.

Найдём его приближённо, разложив функции f и g в ряд в точке $\hat{\lambda}_{k-1}$ и взяв 2 первых члена ряда.

Линеаризация

динамической модели процесса

$$f_{k-1}(\lambda_{k-1}) \approx f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}) + \frac{\partial f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1})}{\partial \lambda_{k-1}} (\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}),$$

$$g_{k-1}(\lambda_{k-1}) \approx g_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}) + \frac{\partial g_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1})}{\partial \lambda_{k-1}} (\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1}),$$

$$\sigma_g^2(\lambda_{k-1}) = g_{k-1}^2(\lambda_{k-1}) \sigma_\xi^2 \approx g_{k-1}^2(\hat{\lambda}_{k-1}) \sigma_\xi^2$$

Подставляем это в выражение для ПВ экстраполированных значений оценки процесса:

$$\begin{aligned} p(\lambda_k | Y_0^{k-1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda_{k-1} | Y_0^{k-1}) p(\lambda_k | \lambda_{k-1}) d\lambda_{k-1} = \\ &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_g(\lambda_{k-1})} \exp \left\{ -\frac{(\lambda_k - f_{k-1}(\lambda_{k-1}))^2}{2\sigma_g^2(\lambda_{k-1})} \right\} \exp \left(-\frac{(\lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1})^2}{2D_{\lambda,k-1}} \right) d\lambda_{k-1} \end{aligned}$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

После подстановки и взятия интеграла получаем:

$$p(\lambda_k | Y_0^{k-1}) \approx c_2 \exp \left\{ -\frac{(\lambda_k - f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))^2}{2(g_{k-1}^2(\hat{\lambda}_{k-1})\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2)} \right\}, \text{ где } F_{k-1} = \frac{\partial f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1})}{\partial \lambda_{k-1}}$$

Подставляем это в уравнение Стратоновича:

$$p(\lambda_k | Y_0^k) = c \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left\{ -\frac{(y_k - S_k(\lambda_k))^2}{2\sigma_n^2} \right\} \cdot c_2 \exp \left\{ -\frac{(\lambda_k - f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))^2}{2(g_{k-1}^2(\hat{\lambda}_{k-1})\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2)} \right\} =$$

$$= c_3 \exp \left\{ -\frac{(\lambda_k - f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))^2}{2(g_{k-1}^2(\hat{\lambda}_{k-1})\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2)} - \frac{(y_k - S_k(\lambda_k))^2}{2\sigma_n^2} \right\}$$

!!! Не даёт
представить АПВ
в виде:

$$p(\lambda_k | Y_0^k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\lambda,k}}} \exp \left(-\frac{(\lambda_k - \hat{\lambda}_k)^2}{2D_{\lambda,k}} \right) = c_4 \exp \left\{ -\frac{1}{D_{\lambda,k}} \frac{\lambda_k^2}{2} + \hat{\lambda}_k \frac{\lambda_k}{D_{\lambda,k}} \right\}$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

Разложим функцию S в ряд в точке экстраполированной оценки $f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1})$ (чтобы получилась скобка $(\lambda_k - f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))$) и возьмём 2 первых члена ряда:

$$S_k(\lambda_k) \approx S_k(f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1})) + \frac{\partial S_k(f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))}{\partial \lambda_k} (\lambda_k - f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))$$

Отсюда:

$$p(\lambda_k | Y_0^k) = c \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left\{-\frac{(y_k - S_k(\lambda_k))^2}{2\sigma_n^2}\right\} \cdot c_2 \exp\left\{-\frac{(\lambda_k - f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))^2}{2(g_{k-1}^2(\hat{\lambda}_{k-1})\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2)}\right\} =$$

$$= c_3 \exp\left\{-\frac{(\lambda_k - f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))^2}{2(g_{k-1}^2(\hat{\lambda}_{k-1})\sigma_\xi^2 + D_{\lambda,k-1}F_{k-1}^2)} - \frac{1}{2\sigma_n^2} \left(y_k - S_k(f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1})) - \frac{\partial S_k(f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))}{\partial \lambda_k} (\lambda_k - f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1})) \right)^2 \right\}$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

Если для любого λ :

$$\exp\{b_1\lambda^2 + a_1\lambda + d_1\} = \exp\{b_2\lambda^2 + a_2\lambda + d_2\}$$

то обязательно

$$b_1 = b_2, \quad a_1 = a_2, \quad d_1 = d_2$$

Решение задачи нелинейной фильтрации

Найдём коэффициенты a и b при λ_k и λ_k^2

$$p(\lambda_k | Y_0^k) = c_4 \exp\{b\lambda_k^2 + a\lambda_k\},$$

$$\left(a = \frac{\hat{\lambda}_k}{D_{\lambda,k}}, b = -\frac{1}{2D_{\lambda,k}} \Rightarrow D_{\lambda,k} = -\frac{1}{2b}, \hat{\lambda}_k = -\frac{a}{2b} \right)$$

Отсюда

$$\hat{\lambda}_k = f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}) + \frac{D_{\lambda,k}}{\sigma_n^2} \left(\frac{\partial S_k(f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))}{\partial \lambda_k} \right) (y_k - S_k(f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))),$$

$$\frac{1}{D_{\lambda,k}} = \left[\left(\frac{\partial f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1})}{\partial \lambda_{k-1}} \right)^2 D_{\lambda,k-1} + g_{k-1}^2(\hat{\lambda}_{k-1}) \sigma_\xi^2 \right]^{-1} + \frac{1}{\sigma_n^2} \left(\frac{\partial S_k(f_{k-1}(\hat{\lambda}_{k-1}))}{\partial \lambda_k} \right)^2$$



Нелинейная фильтрация многомерных МП при векторных наблюдениях*

Постановка задачи (в дискретном времени)

Фильтруемый процесс:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})\xi_{k-1}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\xi_{k-1} \text{ - векторный ДБГШ: } M[\xi_k \xi_m^T] = \mathbf{D}_\xi \delta_{km}$$

$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k)$ – известные векторные функции

Наблюдения:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k,$$

$$\mathbf{n}_k \text{ - векторный ДБГШ: } M[\mathbf{n}_k \mathbf{n}_m^T] = \mathbf{D}_n \delta_{km}$$

$\mathbf{S}_k(\mathbf{c}\mathbf{x}_k)$ – сигнальная функция (известная).

\mathbf{c} – определяет какие компоненты \mathbf{x}_k используются в \mathbf{S}_k

Расширенный Фильтр Калмана (РФК)*



Алгоритм фильтрации по шагам

1. $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ - экстраполированная оценка

$$2. \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} = \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}_{\mathbf{x},k-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \mathbf{g}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{D}_{\xi} \mathbf{g}_{k-1}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$$

- дисперсия ошибки экстраполированной оценки $\tilde{\mathbf{x}}_k$

$$3. \mathbf{K}_k = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \left(\left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right) \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \mathbf{D}_n \right)^{-1}$$

- коэффициент фильтра

$$4. \mathbf{D}_{\mathbf{x},k} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right) \right) \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} - \text{дисперсия ошибки оценки } \hat{\mathbf{x}}_k$$

5. $(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k))$ - невязка измерений

6. $\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k))$ - шаг оценивания

Экстраполяция

Оценивание



Алгоритм фильтрации по шагам

Ещё одна форма записи РФК

1. $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$ - экстраполированная оценка

$$2. \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k} = \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}_{\mathbf{x},k-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \mathbf{g}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{D}_{\xi} \mathbf{g}_{k-1}^T(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$$

- дисперсия ошибки экстраполированной оценки $\tilde{\mathbf{x}}_k$

$$3. \mathbf{D}_{\mathbf{x},k} = \left(\tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{x},k}^{-1} - \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right) \right)^{-1}$$

- дисперсия ошибки оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$

$$4. \mathbf{K}_k = \mathbf{D}_{\mathbf{x},k} \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} \quad - \text{коэффициент фильтра}$$

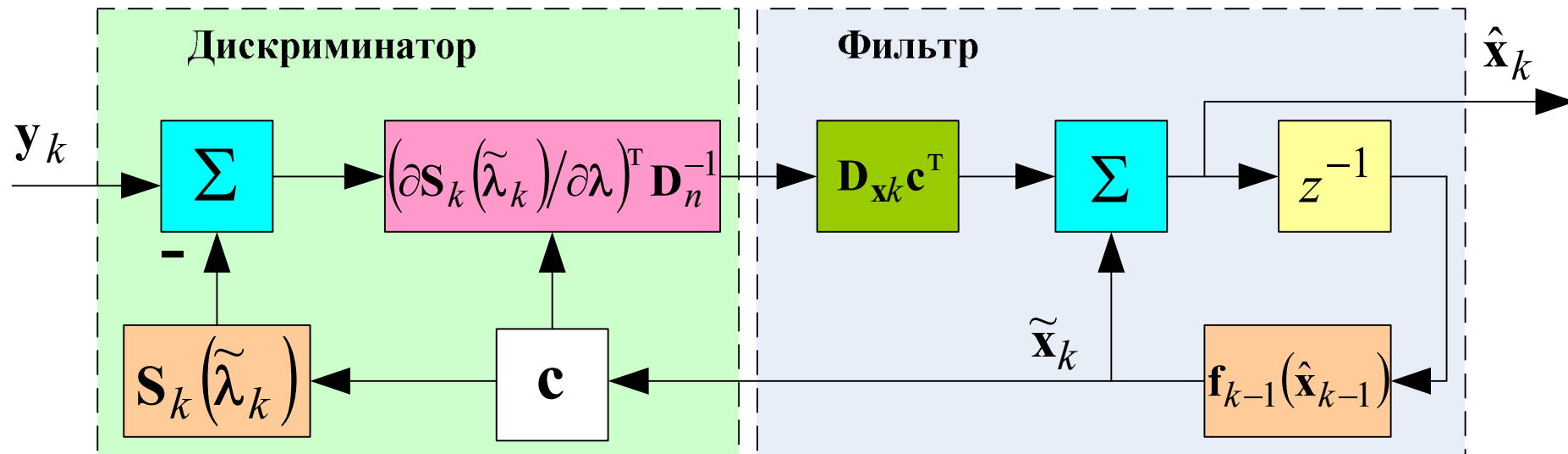
5. $(\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k))$ - невязка измерений

6. $\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k(\mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}_k))$ - шаг оценивания

Экстраполяция

Оценивание

Схема дискретной оптимальной системы фильтрации (схема РФК)



$$\hat{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k} \mathbf{c}^T \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)) = \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{x}k} \mathbf{c}^T \mathbf{u}_{\text{Д}k}$$

$$\mathbf{u}_{\text{Д}k} = \left(\frac{\partial \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{S}_k(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k))$$

Определение дискриминатора:

Это производная логарифма функционала правдоподобия по параметру!!!

Нелинейная фильтрация в непрерывном времени*



Постановка задачи

Фильтруемый процесс:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\xi(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

$\xi(t)$ - векторный БГШ с односторонней СПМ S_ξ

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ - известные векторные функции

Наблюдения:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t) + \mathbf{n}(t)$$

$\mathbf{n}(t)$ - векторный БГШ с односторонней СПМ \mathbf{N}_n

$\mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t)$ - сигнальная функция (известная).

\mathbf{c} - определяет какие компоненты \mathbf{x} используются в \mathbf{S} , $\mathbf{c}\mathbf{x} = \lambda$

Расширенный Фильтр Калмана в непрерывном времени

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{D}_x(t) \left(\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T 2\mathbf{N}_n^{-1} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}, t))$$

$$\frac{d\mathbf{D}_x}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}_x + \mathbf{D}_x \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_\xi \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \mathbf{D}_x \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial F(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{D}_x,$$

где $F(\mathbf{x}, t) = 2\mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t)^T \mathbf{N}_n^{-1} (\mathbf{y}(t) - 0.5\mathbf{S}(\mathbf{c}\mathbf{x}, t))$

